

Gnomon na księżycu, terminator, rondo chopina i gogle czyli jak zmierzyć wysokość gór i głębokości kraterów na księżycu.

Crater depth measurement. A gnomon on the moon, a terminator, a Chopin rondo and google.

Pierwsza obserwacja księżyca przez teleskop zawsze robi wrażenie. A pierwsze zdjęcia jego kraterów, to wstęp do dalszej naszej eksploracji kosmosu.

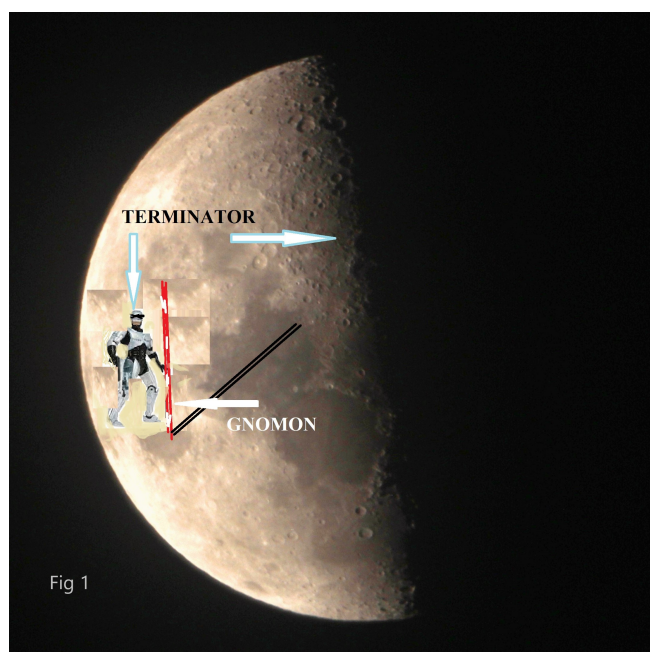
Aby nie ograniczać się tylko do pięknych widoków, spróbujmy nasze zdjęcia wykorzystać np. do wyliczenia głębokości krateru lub wysokości gór na księżycu.

Najlepiej widoczne są kratery, gdy obserwujemy księżyc niebędący w pełni, czyli w momencie, gdy promienie słońca padają pod kątem do jego oświetlonej powierzchni. Wtedy w dolinach i za wzniesieniami widzimy kontrastujący cień.

Widoczna z Ziemi długość cienia dowolnego wzniesienia zależy oczywiście od fazy Księżyca. Największa jest wtedy, gdy w pobliżu nierówności, rzucającej cień, przebiega linia terminatora, a najbardziej „chropowaty” Księżyc zobaczymy wtedy, gdy jasna jest połowa tarczy.

Pomiar katowej długości cienia umożliwi wyznaczenie wysokości wzniesienia względem powierzchni, na którą ów cień pada. Pomiarów takich możemy dokonywać na podstawie bezpośrednich obserwacji wizualnych lub zdjęć powierzchni księżyca.

Na ziemi, aby określić wysokość wzniesienia na podstawie jego długości cienia, wykorzystujemy GNOMON. Postawmy więc gnomon na księżycu (Fig.1). Aby wyniki były najbardziej precyzyjne, nasz gnomon powinien być jak najbliżej terminatora. Gdybyśmy stali na linii terminatora, wysokość słońca byłaby na wysokości naszego wzroku.



„Google prawdę Ci powie”, jak wiesz czego szukać. Poszukajmy w Google wyjaśnienia terminów.:

Terminator

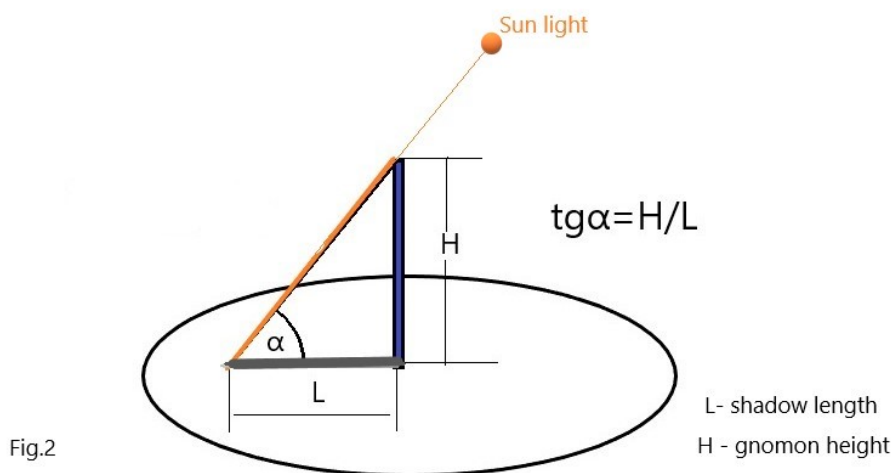
Wg mnie to znane od kilkuset lat pojęcie określające linię, będącą granicą rozdzielającą oświetloną część księżycy od części nieoświetlonej. Inne znaczenie dotyczy nauki czeladnika u mistrza. Mówiło się, że czeladnik terminował u mistrza czyli był to czas, w którym uczył się zawodu. Podobnie podaje słownik języka polskiego, czy też Longman, Webster Miriam Dictionary, czy też Oxford Learner's Dictionaries.

Wg Google to w pierwszym względzie uzbrojona po zęby maszyna, futurystyczny robot killer.

Z innej dziedziny poszukałem w Google informacji na temat pierwszego dzieła Chopina, czyli Opus 1 Rondo c-moll. Wpisałem Rondo Chopina – i otrzymałem informacje o około 80 rondach w poszczególnych miastach. Tak więc wiedza z Google wylądowała na księżycu.

Ale ad rem wróćmy do naszych pomiarów. Pomoże nam Euklides i jego geometria.

Z prostych zależności geometrycznych wynika, że do określenia wysokości gnomonu wystarczy nam pomiar kąta α i długości cienia gnomonu. Fig.2



Tak więc szukaną wysokość wzniesienia H wyliczymy z wzoru:

$$H = \text{tg } \alpha \times L \quad (1)$$

Jak to wygląda na księżycu? W tym celu zwymiarujemy mój nieudolnie narysowany krater.

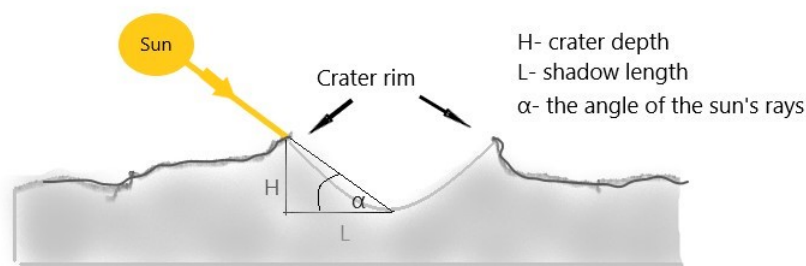


Fig. 3

Gdzie:

H – głębokość krateru

L – długość cienia (którą możemy zmierzyć na zrobionym przez nasz teleskop zdjęciu krateru)

α – kąt padania promieni słonecznych na powierzchnię księżyca

Długość cienia L zmierzmy dość łatwo. Pozostaje więc określenie wielkości kąta α .

Początki pomiarów kraterów i wzniesień na księżycu.

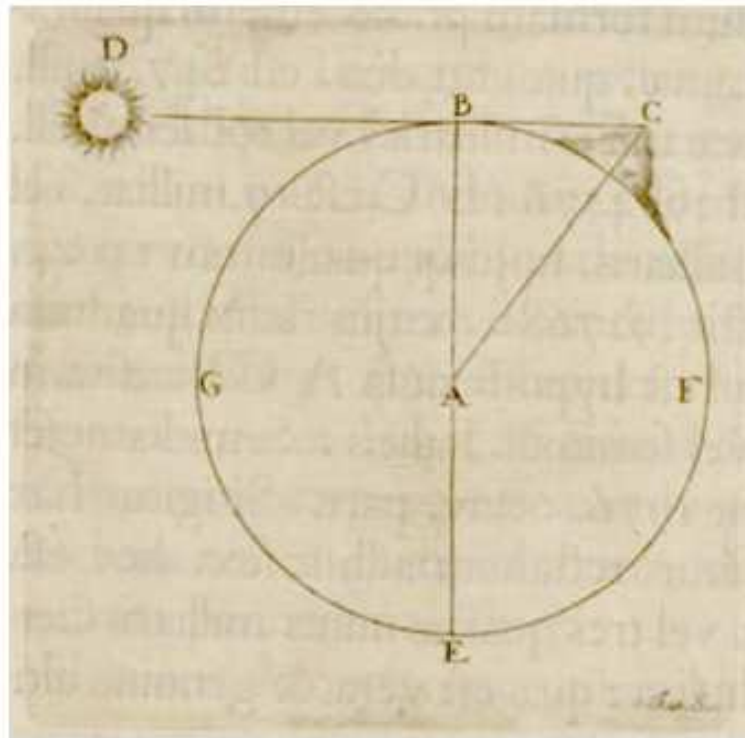
Najprawdopodobniej pierwszą osobą, która dokonała pomiaru krateru na księżycu był Imć Pan Twardowski. Ze względu na niezachowaną literaturę możemy tylko domniemywać, że pierwszego pomiaru dokonał zapewne swoim łokciem, a wynik zanotował również w łokciach.

Określenie „crater” pojawiło się stosunkowo późno. Niemiecki astronom Johann Hieronymus Schroeter, który wydał w 1771r. *Selenotopographische Fragmente*, użył po raz pierwszy tego określenia, do opisanie kraterów na księżycu. Wcześniej określano z greckiego „bowl” lub caldera, ale tylko w stosunku do ziemskich kraterów wulkanicznych.

1. Selenographie J. Heveliusa (rysunek poniżej)

Metoda wyliczenia wysokości wzniesienia, szczytu góry na księżycu została podana przez J. Heveliusa w drugiej połowie XVII wieku. Podobną metodę stosował Galileusz i Riccioli.

Wyliczmy wysokość góry zgodnie z rysunkiem podanym w Selenografii Heveliusa dla szczególnego przypadku, gdy góra znajduje się po nieoświetlonej części terminatora, ale jej szczyt jest jeszcze ciągle oświetlony przez promienie słońca.



Oświetlona część księżyca to półokrąg BAEG. Obserwator z ziemi widzi połowę księżyca księżyc BGAF.

Linia DBC jest linią światła padającą na szczyt C. Oznacza to, że kąt padania promieni słonecznych w punkcie B i C jest równy 0, jest on również prostopadły do kierunku obserwatora z Ziemi. Wynika z tego, że trójkąt DCA jest trójkątem prostokątnym.

Odległość pomiędzy linią terminatora a mierzonym szczytem – odcinek BC jest ramieniem trójkąta, odcinek AB jest promieniem księżyca . Z twierdzenia Pitagorasa wynika:

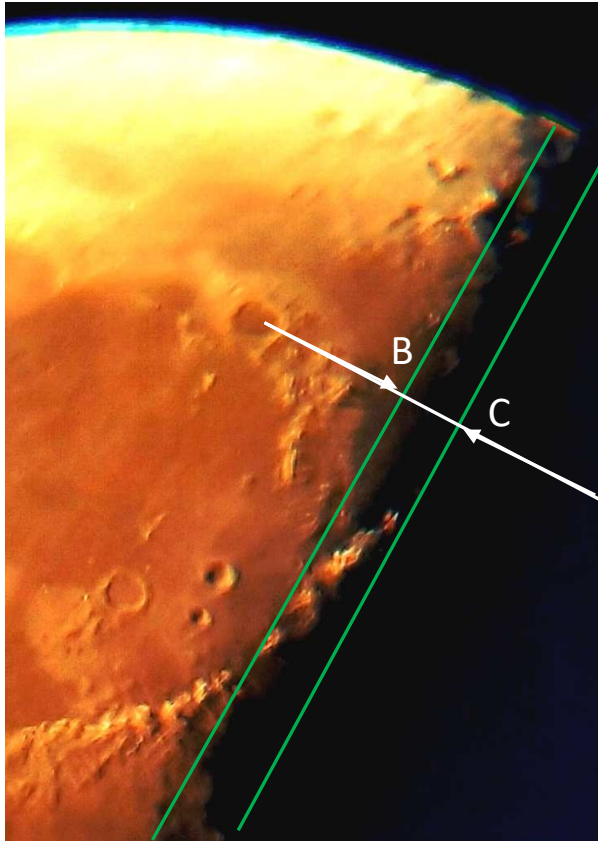
$$(AD)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$AC = \sqrt{(AD)^2 + (BC)^2}$$

Wysokość naszej góry jest równa różnicy odcinków:

$$H = AC - AD$$

Pomiary jest najlepiej wykonać na zdjęciach księżyca.



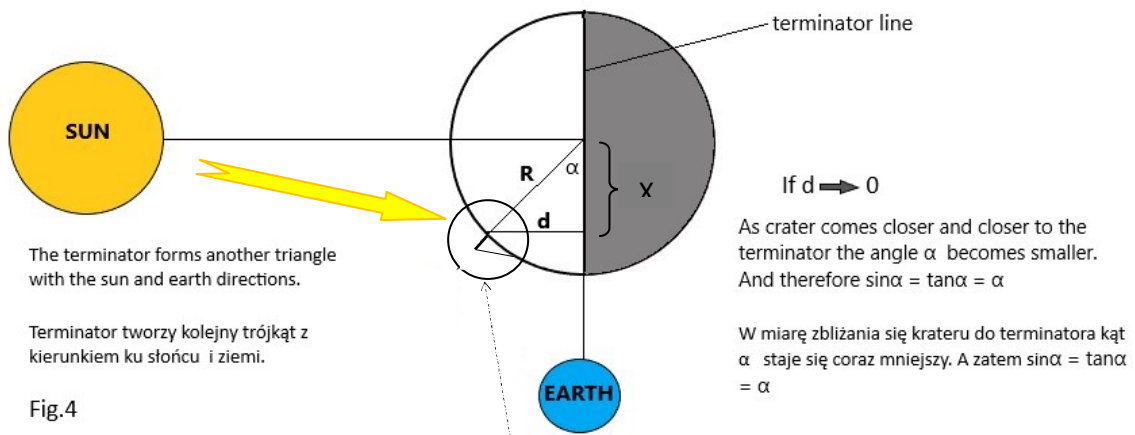
Zdjęcie poglądowe.

Wybrane dosyć przypadkowo.
Nie było wykonane w celu
dokonania i opisu metody
pomiaru

2. Pomiary po oświetlonej części księżyca

W 1779r. William Herschel adoptował powyższą metodę obliczenia wysokości wzniesienia na księżycu dla ogólniejszego przypadku tzn., gdy księżyc nie jest w kwadrze. Opisana niżej II metoda jest podana przez W. Herschela.

Powyżej stwierdziliśmy, że najdokładniejsze pomiary będą miały miejsce, gdy terminator będzie przebiegał przez połowę księżyca, a mierzony przez nas krater będzie jak najbliższej linii terminatora.

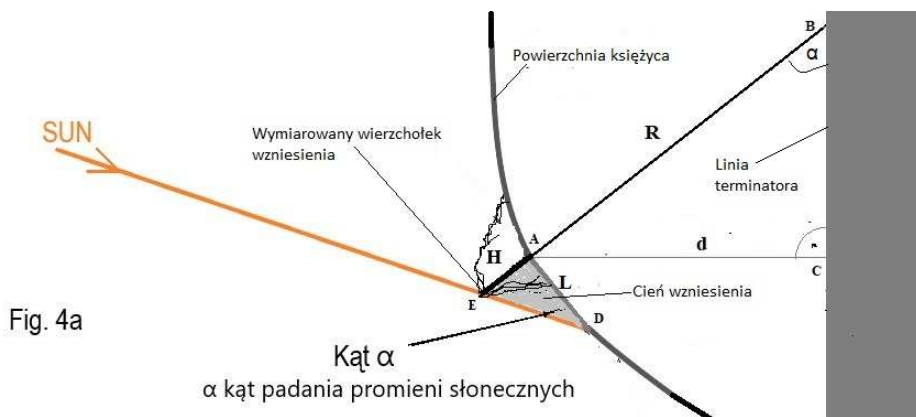


Gdzie:

R – promień księżycy

d – długość odcinka krateru do linii terminatora

Fragment powiększony na Fig.4a
 Przedstawia miejsce na księżycu mierzonego przez nas krateru



I metoda wyliczenia głębokości krateru (wysokości góry księżycowej)

Zauważmy, iż trójkąty z Fig.4 i Fig.4a są trójkątami przystającymi. Wynika z tego, że mają takie same kąty. Jeżeli odległość d będzie maleć a mierzony przez nas krater będzie coraz to bliżej linii terminatora, to kąt α będzie dążył do 0. A to oznacza, że w przybliżeniu:

$$\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$$

ponieważ $\tan \alpha = \alpha = H/L$ więc

$$H = \alpha * L \text{ lub } H = \sin \alpha * L$$

Ale z (Fig.4) $\sin \alpha = d/R$, więc

$$H = L * d/R$$

Dokonując pomiaru długości cienia L, odległości krateru od linii terminatora d i znając promień księżycy, wyliczymy wysokość wzniesienia lub głębokość krateru.

II metoda wyliczenia głębokości krateru (wysokości góry księżycowej)

Z Fig.4c wynika, że trójkąty czerwone i czarne są trójkątami podobnymi, ponieważ górne linie każdego z nich są równoległe, a L (długość cienia) jest prostopadła do H (wysokość). Przy małych odległościach terminatorów (d), R jest faktycznie promieniem Księżyca.

Z trójkątów:

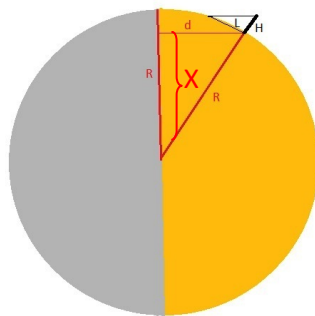
$$H/L = d/x$$

$$H = (d * L)/x$$

A z twierdzenia pitagorasa (wystarczy zmierzyć odcinki x lub d)

$$d^2 + x^2 = R^2$$

Fig 4c



L (shadow length) - długość cienia
H (height) - wysokość wzniesienia
R (The lunar radius) - Promień księżycy
d (terminator distances) - odległość wierzchołka od terminatora

The red and black triangles can be treated as similar triangles because the top lines of each are parallel, and L (shadow length) is at right-angles to H (height). With small terminator distances d and R the lunar radius.

Tak więc, z wyżej przytoczonych wzorów możemy wyliczyć głębokość krateru lub wysokość wzniesienia na księżycu, dokonując pomiaru długości cienia L kąta padania promieni słonecznych α lub długości d lub x i R. Promień księżycy R znamy z literatury.

Do wykonaniu obserwacji i zdjęć księżyca najlepiej jest znaleźć górę lub krater w pobliżu środka Księżyca i dość blisko linii terminatora.

Następnie zmierz na fotografii odległości L (długość cienia), d (odległości do terminatora) i R (promienia Księżyca) za pomocą linijki lub w programie graficznym. Zapisz wartości w tabeli, a następnie oblicz H, korzystając z wcześniej wyprowadzonych równań.

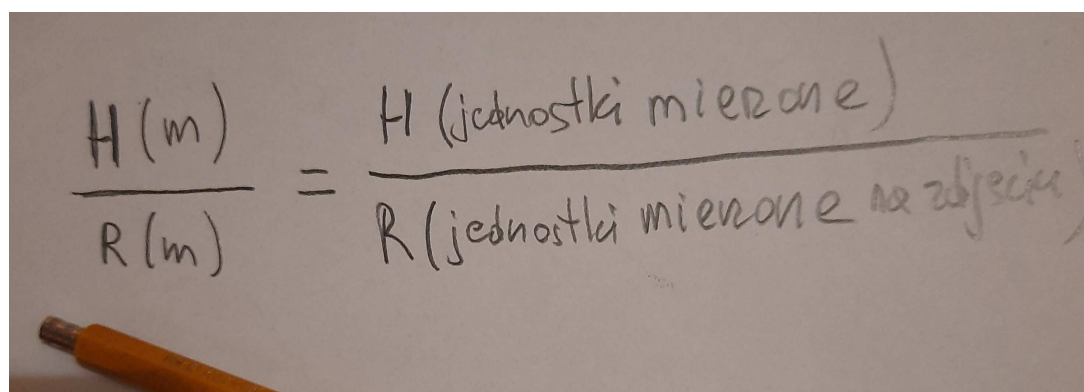
Poniżej pomocna tabelka do notowania naszych obserwacji i obliczeń

| Pomiar/Measurement | Wartość/Value |
|---|---------------|
| Długość cienia / Shadow Length (L) | |
| Odległość terminatora od krateru, wzniesienia / Terminator Distance (d) | |
| Promień księżyca / Moon Radius (R) | |
| Wysokość wzniesienia / Mountain Height (H) | |

Przyjmijmy,

Promień księżyca (Radius of Moon) = 1740 km=174000m

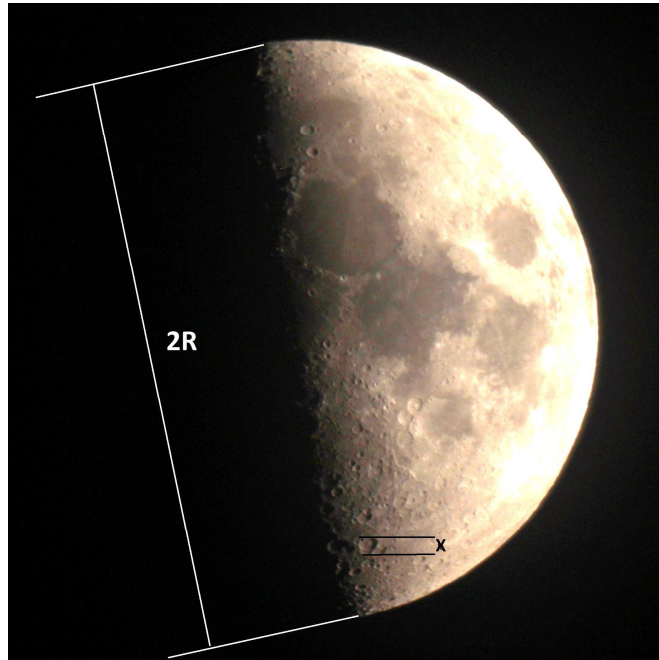
Jeżeli pomiary wykonujemy w milimetrach lub w programie graficznym w pikselach, należy skalibrować wynik, abyśmy mogli wyrazić odpowiedź w jednostkach, które najlepiej nam pasują np. takich jak kilometry, zastosujemy prosty przelicznik:



$$\frac{H(m)}{R(m)} = \frac{H(\text{jednostki mierzone})}{R(\text{jednostki mierzone na zdjęciu})}$$

Czyli wynik w metrach} $H(m) = R(m) * [H(\text{jednostki})/R(\text{jednostki})]$

Poniżej pomiar w pikselach z wykorzystaniem programu graficznego.



Jeżeli chcemy zobaczyć (sfotografować) cały księżyc w teleskopie musimy zapewnić obraz o wielkości kątowej minimum $0,5^\circ$. Jeżeli używamy teleskopu o aperturze 200 mm i ogniskowej 2000 mm, to wtedy, aby osiągnąć żądaną obserwowaną wielkość kątową obrazu, musimy użyć okularu o ogniskowej minimum 20 mm i kącie widzenia 52° . Wtedy uzyskujemy powiększenie równe $100 \times$. Odpowiada to obrazowi z kątem $52^\circ/100 = 0,52^\circ$.

Błędy naszych pomiarów i wyliczeń

Powyższe rozważania dokonywane są w oparciu o proste zależności geometryczne na płaszczyźnie. Nie uwzględniają kulistości księżyca. Stąd dokładność wyników uzależniona jest od fazy księżyca i miejsca mierzonego (obserwowanego) wzniesienia, czy też cienia krateru.

Dokładniejsze rozwiązania można znaleźć w literaturze np.

1. Mateusz Krakowczyk „Góry Księżycowe Geneza i pomiar ich wysokości” Klub Astronomiczny „Almukantarar”
2. A. Branicki „Na własne oczy...”
3. „Determination of the Size and Depth of Craters on the Moon”, Vladimir Grubelnik, Marko Marhl and Robert Repnik, c.e.p.s. Journal | Vol.8 | No1 | Year 2018
4. Ellery, A., & Hughes, S. (2012). Measuring the apparent size of the Moon with a digital camera. *Physic Education*, 47(5), 616–619.
5. Guglielmino, M., Gratton, L. M., & Oss, S. (2010). The thin border between light and shadow. *Physic Education*, 45(4), 378–381.

Kąt padania promieni słonecznych na powierzchnię księżyca.

Najprostszym sposobem wyznaczenia wysokości wzniesienia lub głębokości krateru przy pomiarze tylko i wyłącznie długości cienia L , jest skorzystanie ze wzoru (1) tj.

$$H = \operatorname{tg} \alpha \times L$$

Gdzie kąt α jest kątem padania promieni słonecznych. Możemy go odczytać, korzystając z programu **The Lunar Terminator Visualisation Tool** dostępnego na stronie <https://github.com/fermigas/lvt/wiki> lub wpisując w wyszukiwarce.

W programie podajemy miejsce pomiaru oraz czas. Program podaje nam poszukiwany kąt padania promieni słonecznych.

Pomiar głębokości kraterów uderzeniowych

W pracy Article in Physics Education · July 2013 „Measuring the depth of an impact crater using an internal shadow”, Robert Scott, Xinrong Shen, Ian Mulley and Zili Pan Autorzy na podstawie badań kraterów uderzeniowych przedstawili wzór umożliwiający wyliczenie głębokości kraterów uderzeniowych, mierząc tylko i wyłącznie ich średnicę. Poniżej przedstawiono rysunki wymiarujące badane kratery.

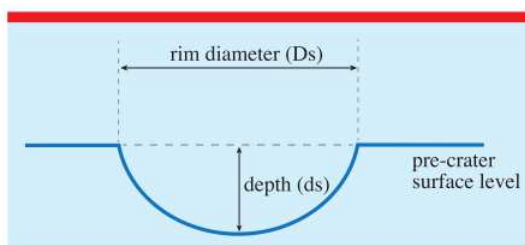


Figure 1. Diagram of a typical school laboratory crater where the depth and diameter are represented by the symbols d_s and D_s , respectively. The crater depth, d_s , and diameter, D_s , are measured in relation to the pre-crater surface level.

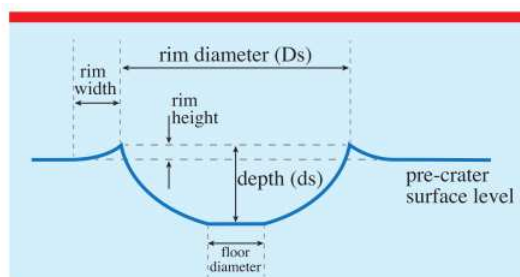


Figure 2. Diagram of a simple impact crater where the depth and diameter are represented by the symbol d and D , respectively. The crater depth, d , and diameter, D , are measured in relation to the top of the crater rim.

Rys.1 przedstawia krater uderzeniowy bez wzniesienia „koronalnego”; rys.2 krater z ringiem-wzniesieniem wokół krateru.

Maksymalne wzniesienie krateru można wyliczyć wg wzoru:

$$d = 0.2295 D^{0.9224}$$

Wynika z niego, że stosunek d_s/D_s mieści się w granicach $0,23 \pm 0,02$. Czyli w przybliżeniu wynosi 1:5.

Inni autorzy podają wzór:

$$d = 0.2295 D^{0.9224}$$

stosunek ds./Ds. mieści się w granicach 0,19 +/- 0,01
Czyli w przybliżeniu wynosi 1:5.

Dalsze pomiary 174 kraterów uderzeniowych pozwoliły otrzymać wzór w postaci:

$$d = 0.2369D^{0.8882}$$

stosunek ds./Ds. mieści się w granicach 0,19 +/- 0,01

Powyższe wzory pozwalają wyliczyć głębokość kraterów uderzeniowych z podobną dokładnością, jak stosując metodę pomiaru cienia i wykorzystując geometrię zjawiska. Zawsze jednak wychodzi stały stosunek $d/D = 1:5$

W pracy „Obliczanie głębokości i średnicy krateru na Księżycu” autorzy Remigiusz Pospieszynski z Obserwatorium Astronomicznego UAM, 17 czerwca 2006r. podają wzór:

$$d = 0.322D^{0.86}$$

gdzie d - głębokość, D – średnica

Intuicyjnie rzecz biorąc, powyższe wzory mają uzasadnienie. W podobnych warunkach tzn. przy stałej grawitacji, w miarę stałej atmosferze i statystycznie jednakowych wiatrach lub jak w przypadku księżyca braku atmosfery wynika, że formowanie się w przypadku księżyca kraterów uderzeniowych musi podlegać tym samym prawom, więc ich budowę i wymiar da się opisać jedną formułą. Podobnie jest na ziemi np. dla wydmy, gdzie kąt wydmy (np. góra piasku na pustyni) od strony zawietrznej jest stały i wynosi zawsze, o ile pamiętam, ok. 60° a od strony nawietrznej ok 40° .

Nasze wyliczenia i pomiary

Możliwość wyliczenia wysokości wzniesień lub głębokości kraterów na księżycu jest naszą dalszą ciekawą pracą pozwalającą nam wykorzystać nasze obserwacje i wykonane zdjęcia. Tym sposobem udało mi się poprawić i skorygować wysokość pewnego wzniesienia na księżycu. Wg moich obliczeń wzgórze jest wyższe niż podają popularne atlasy księżyca o równe 63cm.

Z wyrazami szacunku